Пространство педагогических исследований. 2026, т. 3, № 1, с. 45–64.
Education Research Environment, 2026, vol. 3, no. 1, pp. 45–64.

Научная статья
УДК 372.851+512
https://elibrary.ru/rizhnq
https://doi.org/10.23859/3034-1760.2026.35.17.004

О методике обучения элементам теории решеток на факультативных занятиях по математике в школе

Евгений Александрович Перминов
Уральский государственный педагогический университет,
Екатеринбург, Россия
perminov_ea@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-8807-2476

Evgeniy A. Perminov
Ural State Pedagogical University,
Ekaterinburg, Russia
perminov ea@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-8807-2476

Аннотация. В процессе имеющей место на сегодняшний день алгебраизации математики возрастает роль абстрактной алгебры, широко известной в новейших исследованиях под названиями *современная* и *общая алгебра*, в современных научных исследований. В последние десятилетия сфера ее применения стремительно, охватывая не только математику, но и другие науки: естественные, технические, экономические и др. В них довольно часто используются результаты исследований абстрактной алгебры.

Идеи и методы абстрактной алгебры играют фундаментальную роль в совместных научных разработках исследованиях дискретных и непрерывных математических моделей и составляют математическую основу информатики. Создаваемые на ее базе средства используются в организации и анализе больших объемов данных для научных исследований, в реализации вычислительных процессов в самых различных областях науки и производства. По этой причине те или иные элементы абстрактной алгебры активно внедряются в математическом образовании на всех его уровнях.

Для факультативных занятий по математике в школе опубликованы методические пособия и статьи, посвященные обучению важным элементам абстрактной алгебры из ее классических областей – теории групп, колец и полей. В то же время отсутствуют работы, предназначенные для обучения в школе элементам теории решеток, также являющейся классической областью современной алгебры.

В статье представлена методика внедрения в содержание профильного обучения на факультативных занятиях в школе понятия «решетка» и важных свойств ее элементов. А также – понятий «изоморфные («равные») решетки» и «автоморфизм («симметрия») решеток». Они особенно важны для ознакомления и освоения в классах с углубленным изучением математики, физики, химии и некоторых других предметов.

Ключевые слова: математическое образование, школа, профильное обучение, элементы абстрактной алгебры, решетка

Для цитирования: Перминов Е. А. О методике обучения элементам теории решеток на факультативных занятиях по математике в школе. *Пространство педагогических исследований,* 2026, т. 3, № 1, с. 45–64. https://doi.org/10.23859/3034-1760.2026.35.17.004; EDN: RIZHNQ

On the Method of Training in the Elements of Lattice Theory in Elective Mathematics Classes at School

Abstract. The continuing algebraization of mathematics has significantly strengthened the position of abstract algebra, commonly described in contemporary scholarship as modern or general algebra, within the structure of current scientific inquiry. In recent decades, its range of applications has expanded well beyond the boundaries of pure mathematics. Concepts and results originating in abstract algebra are now routinely employed in the natural sciences, engineering, economics, and other fields where structural and formal methods are required.

Abstract algebra provides essential conceptual tools for the study of both discrete and continuous models and forms part of the theoretical foundation of computer science. Its structural frameworks support the development of methods for organizing and analyzing large-scale datasets, as well as for implementing computational procedures across a wide spectrum of scientific and industrial contexts. Against this background, the incorporation of algebraic thinking into mathematics education has become not only justified but necessary.

In school practice, particularly within elective mathematics courses, instructional materials have been developed to introduce students to classical areas of abstract algebra, including group theory, ring theory, and field theory. However, lattice theory-despite its established status as a classical branch of modern algebra-remains largely absent from secondary-level curricula and from methodological research devoted to advanced school instruction.

This article outlines an approach to integrating the concept of a lattice and the key properties of its elements into specialized upper-secondary mathematics courses delivered in elective format. The discussion further includes the notions of isomorphic lattices and lattice automorphisms, interpreted in terms accessible to school students. These topics are especially relevant for programs with an advanced focus on mathematics, physics, chemistry, and related disciplines, where structural reasoning and abstract modeling play a central role.

Keywords: mathematics education, secondary schooling, specialized mathematics instruction, abstract algebra, lattice theory

For citation: Perminov E. A. On the Method of Training in the Elements of Lattice Theory in Elective Mathematics Classes at School. *Education Research Environment,* 2025, vol. 3, no. 1, pp. 45–64. (in Russain) https://doi.org/10.23859/3034-1760.2026.35.17.004; EDN: RIZHNQ

Введение

Как отмечается в математической энциклопедии[1], роль абстрактной алгебры (известной также под названием *современной* или *общей алгебры*) в математике «исключительно велика, и существует объективная тенденция к ее дальнейшей “алгебраизации”». В последние десятилетия сфера ее применения расширяется «столь стремительно, что иногда поговаривают об “алгебраической чуме”, охватившей не только математику, но и другие науки»[2]. Например, зародившаяся еще в XIX в. в работах великого математика Э. Галуа, теория групп как классическая область абстрактной алгебры стала основой описания симметрии в науке и природе, и поэтому ее язык пронизывает исследования в физике химии и даже в искусстве[3]. Нам представляется весьма важным факт, отмеченный в монографии крупного математика Г. Биргофа[4], – установление фундаментальной связи теории решеток как отличной классической области абстрактной алгебры «с самыми разными разделами математики и других естественных наук. Здесь и геометрия, и теория групп, и функциональный анализ, и теоретическая физика, и теория вероятностей»[5].

Как показывает проведенный нами ранее анализ трудов выдающихся ученых в сфере информатики (В. М. Глушкова, А. П. Ершова и др.)[6], в процессе внедрения элементов абстрактной алгебры в профильное обучение математике в школе важно исходить из того, что ее язык является основой формирования теории формальных языков алгоритмизации и программирования, породивших лавинообразное распространение Информационных технологий (ИТ). Этим обусловливается фундаментализация профильного обучения школьников алгоритмизации и программированию с целью их подготовки к грамотному использованию искусственного интеллекта, нейросетей и т. д.

В нашей работе «О методологии отражения элементов современной алгебры в содержании математической и методической подготовки будущих учите-

---

[1] Математическая энциклопедия: в 5 т. / под редакцией И. М. Виноградова. Т. 1 (А–Г). Москва: Советская энциклопедия, 1979. 1152 стб.

[2] Фрид Э. Элементарное введение в абстрактную алгебру. Москва: Мир, 1979. С. 7.

[3] Вейль Г. Симметрия. Москва: Наука, 1968. 190 с.; Волошинов А. В. Математика и искусство: Книга для тех, кто не только любит математику или искусство, но и желает задуматься о природе прекрасного и красоте науки. Москва: Просвещение, 2000. 399 с.

[4] Биркгоф Г. Теория решеток. Москва: Наука, 1984. 568 с.

[5] Там же. С. 7.

[6] Перминов Е. А. Методическая система обучения дискретной математике студентов педагогических направлений. Екатеринбург: Издательство Российского государственного профессионально-педагогического университета, 2015. 268 с.

лей»[1] в результате анализа роли абстрактной алгебры в естественных, технических, экономических и некоторых других науках, устанавливается важность влияния ее элементов на содержание математической и методической подготовки будущих учителей. Там же обосновывается необходимость внедрения абстрактной алгебры в профильное обучение математике и информатике в школе.

Кроме того, в указанной статье формулируется вывод о том, что в развитии абстрактного мышления учащихся следует отойти от длившейся многие тысячелетия традиции именованных натуральных чисел (эпохи «мамонтов»). На основе понятий абстрактной алгебры метапредметного характера необходимо формировать методические умения будущих учителей демонстрировать учащимся посильные их восприятию компоненты и особенности «нечисловой» математики»[2], а именно – элементы «нечисловой» математики из абстрактной алгебры, позволяющие уйти от изучения «довлеющих рекомендаций работать с установившимся инструктивным материалом»[3]. Очевидно, что на сегодняшний день в изучении довлеют свойства чисел и «инструкции» по тождественному преобразованию привычных алгебраических выражений. Поэтому учащимся покажется удивительным, например, что может быть $a + a = a$ $(a \vee a = a)$ при изучении такого наглядного понятия нечисловой математики, как решетка, или $2 \cdot 3 = 1$ в процессе освоения «новой арифметики» пятиэлементного поля. Отметим также, что «нечисловые» элементы абстрактной алгебры особенно важны в развитии абстрактного мышления.

Еще в 1935 г. в своем докладе на совещании преподавателей математики академик П. С. Александров выступал за внедрение в школьную математику теоретико-множественного метода и ряда идей абстрактной алгебры, утверждая, что «на простом и элементарном материале можно учить большим математическим идеям». При этом «с учетом мнения ведущих математиков в нашей стране знакомство школьников с понятием группы в явном виде было ограничено рамками факультативов»[4].

---

[1] Перминов Е. А. О методологии отражения элементов современной алгебры в содержании математической и методической подготовки будущих учителей // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2014. № 8. С. 115–120.

[2] Перминов Е. А. О методологии отражения элементов современной алгебры в содержании математической и методической подготовки будущих учителей // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2014. № 8. С. 118.

[3] Красовский Н. Н. Математическое моделирование в школе // Известия Уральского государственного университета. 1995. № 4. С. 12–24.

[4] Тестов В. А. О формировании понятия группы // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона: периодический межвузовский сборник научно-методических работ. Вып. 7 / под редакцией Е. М. Вечтомова. Киров: Издательство ВятГГУ, 2005. С. 168.

Проводимый в статье обзор методической и популярной литературы по математике для внеклассной работы в школе показывает, что уже разработана методика изучения ставших в цифровую эру общеобразовательными понятий из классических областей абстрактной алгебры, каковыми являются, например, ключевые понятия теории групп, колец и полей.

Разработка методики обучения элементам абстрактной алгебры в школе была начата еще в 80–90-е годы прошлого века известными математиками и методистами. Так, в издании «Дополнительные главы по курсу математики. Учебное пособие по факультативному курсу для учащихся 9 классов»[1] изложена методика важного для изучения этих элементов раздела «Множества и операции над ними». Далее, в работе «Факультативный курс. Избранные вопросы математики. Для учащихся 9 классов»[2] представлена методика дальнейшего изучения элементов абстрактной алгебры на основе раздела «Бинарные отношения и соответствия». В свою очередь, в пособиях И. Н. Антипова, Н. Я. Виленкина и др.[3]; Л. А. Калужнина и В. А. Сущанского[4] изложена методика наглядного изучения на факультативных занятиях понятия «группы» на основе свойств симметрий плоских фигур и групп их геометрических преобразований.

Отметим и первую книгу В. В. Деменчука[5], предназначенную для обучения в школе элементам теории полугрупп, играющей фундаментальную роль в теории формальных языков[6] как основе разработки языков программирования. Также считаем важным упомянуть о сборнике задач по алгебре и теории чисел В. В. Алфутовой, А. В. Устинова[7], в котором есть раздел о кольце сравнений (арифметике остатков), важном в кодировании информации и криптографии.

Принимая во внимание вышесказанное, подчеркнем, что в методической литературе для школы отсутствуют работы о методике обучения элементам

---

[1] Дополнительные главы по курсу математики. Учебное пособие по факультативному курсу для учащихся 9 классов / составитель П. В. Стратилатов. Москва: Просвещение, 1974. 142 с.

[2] Антипов И. Н., Виленкин Н. Я. и др. Факультативный курс. Избранные вопросы математики. Для учащихся 9 классов / составитель П. В. Стратилатов. Москва: Просвещение, 1979. 191 с.

[3] Антипов И. Н., Виленкин Н. Я. и др. Факультативный курс. Избранные вопросы математики. Для учащихся 7–8 кл. Москва: Просвещение, 1978. 192 с.

[4] Калужнин Л. А., Сущанский В. А. Преобразования и перестановки. Москва: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1974. 117 с.

[5] Деменчук В. В. На пороге алгебры. Минск: Вышэйшая школа, 1987. 144 с.

[6] Перминов Е. А. О методике обучения дисциплине «Элементы теории формальных языков» будущих инженеров // Пространство педагогических исследований. 2024. Т. 1, № 4. С. 34–52.

[7] Алфутова В. В., Устинов А. В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. Москва: ИЦНМО, 2005. 320 с.

теории решеток (как уже ранее отмечено), также являющейся классической областью абстрактной алгебры. Уточним, что порядковые структуры теории решеток лежат в основе исследования порядка и хаоса в сложных системах различных наук и в природе. В связи с этим отметим, что в исследовании порядка и хаоса фундаментальную роль играет теория фракталов, в которой особо важны «многочисленные аналоги “решеточных” фракталов, конструируемых на основе понятий, методов и алгоритмов теории решеток»[1].

Подчеркнем, что элементы теории решеток служат определяющим фактором формирования у студентов и школьников *нелинейного* мышления, представляющего собой «антипод» линейного. «Линейное одномерное мышление наиболее присуще мышлению людей с древних времен в результате широкого использования в повседневной жизни линейного порядка (сравнения чисел по величине) из множества натуральных чисел. Линейное мышление до сих пор доминирует как в умах людей, так и в ряде областей науки и является принципиально недостаточным, и даже опасным»[2].

Как следует из вышеизложенного, представляется актуальной **цель** статьи, заключающаяся в разработке некоторых важных аспектов методики профильного обучения элементам теории решеток на факультативных занятиях по математике в классах с углубленным изучением математики, физики, химии и некоторых других предметов, в том числе относящихся к сфере искусства.

В процессе реализации цели статьи особую важность приобретает роль принципов развивающего обучения и преемственности в обучении математике между школой и вузом.

Ниже представим характеристику особенностей методики обучения решению исследовательских задач на ключевые понятия теории решеток и их свойств, способствующих пропедевтике формирования у школьников элементов нелинейного мышления.

Результаты исследования могут послужить основой для дальнейшей разработки методики профильного обучения элементам теории решеток в школе, а также для подготовки учащихся к конкурсам рефератов по темам, связанным с использованием тех или иных элементов абстрактной алгебры.

---

[1] Перминов Е. А. О роли дискретной математики в изучении понятий хаоса, порядка и фрактала в вузах // Материалы XVI Колмогоровских чтений: 3-я Международная научно-методическая конференция (Кострома, 7–9 декабря 2021 г.) / под редакцией В. В. Секованова. Кострома: Костромской государственный университет, 2021. С. 37–42.

[2] Тестов В. А., Перминов Е. А. Трансдисциплинарная роль физико-математических дисциплин в современном естественнонаучном и инженерном образовании // Образование и наука. 2023. Т. 25, № 7. С. 30.

ISSN 3034-1760

Основная часть

Анализ учебных пособий, посвященных теории решеток и предназначенных для студентов вузов, показывает, что определение решетки как частично упорядоченного множества трудно для восприятия школьников. По этой причине, опираясь на учение В. В. Давыдова, можно утверждать, что в методике обучения элементам теории решеток ведущую роль играет реализация следующих принципов: принципа понятийного подхода к содержанию обучения и принципа опоры на поисковую активность школьников при решении упражнений[1].

В разработке указанной методики используется краткая схема формирования представлений школьников о понятиях изоморфизма и автоморфизма графов и решеток[2], а также применяется методика изучения понятия обыкновенного графа и его свойств и наглядные изображения вершин и ребер графов[3].

Отметим, что рассматриваемые далее решетки являются *конечными*, т. е. имеющими только конечное число элементов.

Методика изучения понятия решетки и ее основных элементов

Анализ учебных пособий по исследуемой нами тематике позволил утверждать, что школьникам весьма сложно дается усвоение понятия «решетка».

С целью повышения эффективности обучения в самом начале следует напомнить, что еще в древние времена у людей возникала необходимость *сравнивать* в первую очередь именованные, а потом натуральные числа по величине и различные предметы по их размерам, форме или другим важным параметрам.

Существующий порядок на множестве натуральных и других чисел удобно стало изображать на прямой, называя ее *числовой*. Так, впервые возникло важное представление о существовании взаимно-однозначного соответствия между числами и точками числовой прямой. При этом *линейно упорядоченным* множеством стали называть любое подмножество множества натуральных чисел, сравниваемых между собой по величине.

Такое наименование оправдано, поскольку эти натуральные числа можно упорядочить, изображая их точками прямой. В качестве примера приведем порядок на множестве матрешек; среди учащихся по возрасту, по росту, по фами-

---

[1] Давыдов В. В. Виды обобщения в обучении. Москва: Педагогическое общество России, 2000. 480 с.

[2] Перминов Е. А. О развивающем обучении в формировании представлений о понятиях изоморфизма и автоморфизма графов и решеток // Математика в современном мире: материалы II Всероссийской научно-практической конференции, посвященной 160-летию видного российского математика Д. А. Граве (Вологда, 19–23 сентября 2023 г.) / под редакцией В. А. Тестова, Н. В. Масловой. Вологда: ВоГУ, 2023. 190.

[3] Перминов Е. А. Дискретная математика: учебное пособие для 8–9-х классов средней общеобразовательной школы. Екатеринбург: ИРРО, 2004. 206 с.

лии в классном журнале; на множестве нот и т. д. Все эти множества также являются линейно упорядоченными.

Однако далеко не все множества предметов можно назвать линейно упорядоченными, поскольку их элементы нельзя сравнивать между собой с помощью числовой прямой. Например, множество прямоугольников, сопоставляемых между собой по длине и ширине. Их можно сравнить лишь по величине площади, а не по форме, определяя, какой из них можно изобразить внутри другого прямоугольника заранее заданного размера, а какой – нельзя.

Множество воинских званий соотносится по принципу подчинения. Иными словами, установить, у кого звание *выше*, у кого – *ниже* можно только с помощью ребер графа (см. рис. 1). В представленном множестве, уже не являющемся линейно упорядоченным, буквами К, $Л_1$, $Л_2$ и Р обозначены соответственно звания капитана, двух лейтенантов и рядового.

Нижний конец каждого ребра маркирует подчиненного, верхний – его непосредственного начальника. Лейтенанты друг другу не подчиняются, поэтому точки, их изображающие, не соединены ребром.

На рис. 2 изображен граф, в котором вершины обозначают членов коллектива служащих. При этом верхний и нижний концы каждого ребра показывают, кто кому подчиняется, т. е. *выше* или *ниже* по должности (нижний конец каждого ребра – подчиненный, верхний – начальник). Так, вершины a и b обозначают подчиненных непосредственного начальника c. При этом 1 в верхней части графа отмечен главный начальник всех других членов коллектива.

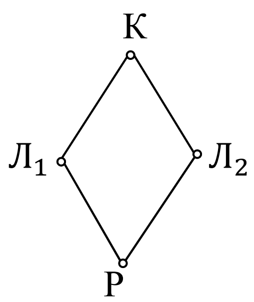

Рис. 1

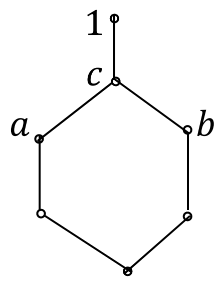

Рис. 2

Далее рассматриваются специально подобранные графы с небольшим числом вершин, у каждого из которых любое ребро можно изобразить в виде отрезка так, что одна вершина этого ребра находится *выше* другой вершины (см. рис. 2). При этом ребро, соединяющее, например, вершины a и b, может быть изображено по-разному (см. рис. 3).

Введем обозначение $a > b$, если вершина a расположена выше вершины b.

На рис. 4 ребро изображено неправильно – горизонтальной линией, и поэтому невозможно понять, какая из вершин a или d *выше* или *ниже* другой. Но главное, все эти графы следует подобрать таким образом, чтобы в результате на рисунках они предстали как изображения (диаграммы) частично упорядоченных множеств[1] (см. такие диаграммы на рис. 1–2). Кроме того, целесообразно также сразу предусмотреть изображения графов, являющиеся диаграммами решеток.

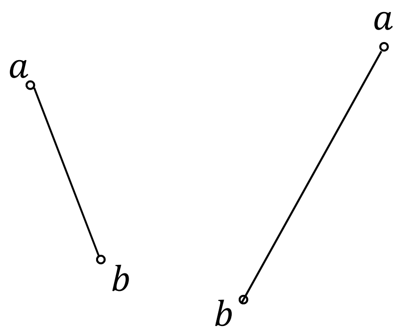

Рис. 3

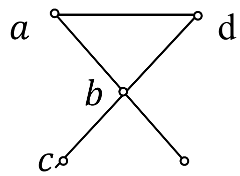

Рис. 4

Как уже зафиксировано, для каждого ребра такого графа одна из его вершин на изображении находится *выше* или *ниже* другой. При этом ребро, соединяющее, например, вершины a и b, может быть представлено по-разному (см. рис. 3). Как видно, вершина a расположена выше вершины b, что будем обозначать как $a > b$.

Очевидно, что если $a > b$ и одновременно $b > c$, то вершина a находится на изображении графа *выше* вершины c (см. рис. 4). В данном случае дополнять граф ребром, соединяющим вершины a и c и показывающим это на рисунке, очевидно, не нужно.

Здесь мы поступили по аналогии с числами на прямой, сравниваемыми уже по величине (меньше – больше): взяли на числовой прямой натуральные числа a, b и c, удовлетворяющие неравенству $a > b > c$. В этом случае понятно, что $a > c$ без обозначения какой-либо линией, проведенной от a к c.

Замечание. Таким же образом поступим, если между вершинами графа a и c в цепи их соединяющей имеется не одна, а больше вершин, находящихся *ниже* a, но *выше* c (например, если есть три вершины d_1, d_2, и d_3, (см. рис. 5)).

При отсутствии вершины x, отвечающей условию $b > x > a$, вершина b называется *покрытием* элемента a, что обозначим как $a > b$. Например, на рис. 5 вершина d_3 является покрытием вершины c.

Определение 1. Вершины a и b называются *сравнимыми,* если $a > b$.

Иными словами, они являются началом и концом цепи графа, в изображении которого a находится выше b. Если в графе такой цепи не существует, то вершины a и b именуются *несравнимыми.*

[1] Биркгоф Г. Теория решеток. Москва: Наука, 1984. 568 с.

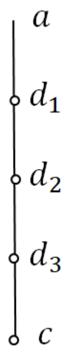

Рис. 5

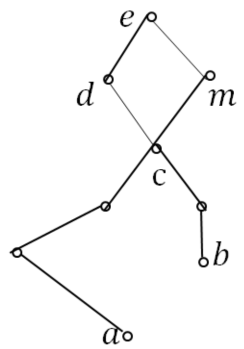

Рис. 6

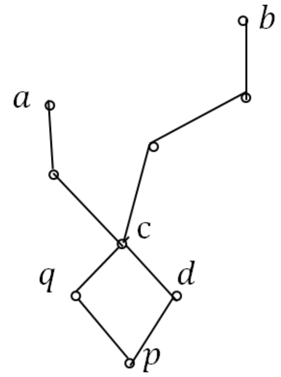

Рис. 7

Например, в графе, представленном на рис. 6, имеются несравнимые вершины a и b, поскольку отсутствует цепь.

Далее для определения понятия решетки на упорядоченном таким образом множестве вершин графа наглядно определяются операции нахождения точной верхней и нижней граней вершин графа. Однако в силу необычности и сложности восприятия этих терминов теории решеток предпочтительнее использовать привычные для школьников понятия и определения.

Так, операцию нахождения точной верхней грани двух вершин a и b назовем **суммой** этих вершин и обозначим $a + b$. В свою очередь, операцию нахождения точной нижней грани двух вершин a и b лучше назвать *умножением,* а результат – *произведением* этих вершин a и b.

Определим правила выполнения указанных операций.

1. Начнем с нахождения суммы $a + b$ и произведения $a \cdot b$ *сравнимых* вершин a и b.

Определение 2. Пусть произвольные вершины a и b являются ***сравнимыми,*** причем $a > b$. Тогда $a + b = b$ и $a \cdot b = a$.

Иными словами, сумма равна вершине, которая на изображении графа расположена выше, а произведение – той, что ниже.

Произведение вершины самой на себя определим так: $a \cdot a = a$.

Сумму вершины представим как: $a + a = a$.

На рис. 6 видим, что $c \cdot a = a$ и $c \cdot b = b$.

2. Дадим определения суммы $a + b$ и произведения $a \cdot b$ ***несравнимых*** вершин a и b.

Определение 3. Рассмотрим множество М всех элементов данного графа, каждый из которых находится *выше* вершины a и вершины b одновременно. Затем в этом множестве М необходимо найти вершину, которая *ниже* всех других вершин этого множества. Если такая вершина имеется, то она называется ***суммой*** $a+b$ вершин a и b.

Например, в графе, представленном на рис. 6, находим такое множество $\mathrm{M}=\{c,d,e,m\}$. В М существует вершина c, расположенная ниже всех других вершин d,e,m этого множества, следовательно, $a+b=$ с.

Дадим определение *произведения* $a\cdot b$ *несравнимых* вершин a и b.

3. *Определение 4.* Рассмотрим множество М всех элементов данного графа, каждый из которых находится *ниже* вершины a и вершины b одновременно. Затем в этом множестве необходимо найти вершину, расположенную *выше* всех других вершин этого множества М. Если такая вершина имеется, то она называется ***произведением*** $a\cdot b$ вершин a и b.

Например, в графе, представленном на рис. 7, находим такое множество $\mathrm{M}=\{c,d,p,q\}$. В М существует вершина c, которая выше всех других вершин d,p,q этого множества, следовательно, $a\cdot b=$ с.

Определение 5. Решеткой называется граф, в котором для любых двух его вершин a и b существует их сумма $a+b$ и произведение $a\cdot b$.

В отличие от линейно упорядоченного множества чисел на числовой прямой такие графы в теории решеток называют *частично упорядоченными множествами* (ч.у.м.).

Напомним, что все рассматриваемые в статье решетки являются ***конечными***.

Далее учащимся предлагается выяснить, почему частично упорядоченные множества, приведенные на рис. 8–11, не считаются решетками.

Выясним, например, почему ч.у.м. A, представленное в виде диаграммы на рис. 11, не является решеткой. Для этого рассмотрим его элементы a и b.

Согласно определению суммы $a+b=c$ вершин a и b, необходимо найти сначала множество M, в котором все вершины графа находятся выше a и b одновременно. Далее среди всех других вершин этого множества М должна обнаружиться вершина c, расположенная ниже всех других его вершин. На первый взгляд таким является множество $L=\{x,y,z,u\}$, однако в нем среди вершин нет такой вершины c, значит, сумма $a+b$ не существует.

Определение 6. Наглядное изображение решетки в виде графа в теории решеток называется *диаграммой* решетки. При этом в решетке все вершины графа называют элементами решетки.

Понятие изоморфных (равных) решеток. Изоморфизм (равенство) двух решеток определяется на основе взаимно-однозначного соответствия между элементами решеток, при этом элемент, соответствующий элементу a, обозначается как элемент a'.

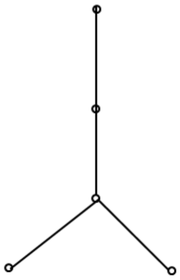

Рис. 8

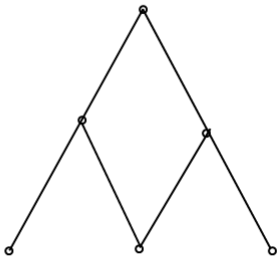

Рис. 9

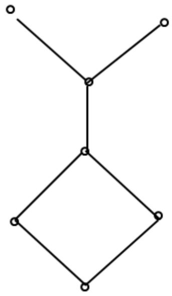

Рис. 10

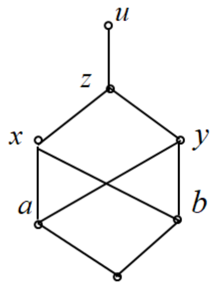

Рис. 11 ч.у.м A

Определение 7. Взаимно-однозначное соответствие между элементами этих решеток называется ***изоморфизмом,*** если выполняются следующие условия:

1) сумме $a + b$ элементов a и b одной решетки соответствует элемент $(a + b)'$ другой решетки, равный $a' + b'$ (кратко: $(a + b)' = a' + b'$);

2) произведению $a \cdot b$ элементов a и b одной решетки соответствует элемент $(a \cdot b)'$ другой решетки, равный $a' \cdot b'$ (кратко: $(a \cdot b)' = a' \cdot b'$).

Примеры диаграмм трех равных решеток приведены на рис. 12–14. Взаимно-однозначное соответствие между элементами указанных решеток устанавливается с помощью стрелки →:

$$u \to u', \ a \to a', \ b \to b', \ c \to c', \ d \to d', \ e \to e'.$$

Тогда, например,

$$(a + b)' = a' + b' = a + b = d, \text{ т. е. } (a + b)' = d;$$
$$(a \cdot b)' = a' \cdot b' = a \cdot b = u, \text{ т. е. } (a + b)' = u.$$

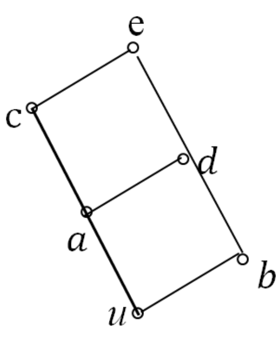

Рис. 12

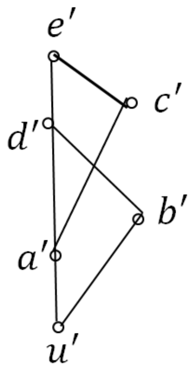

Рис. 13

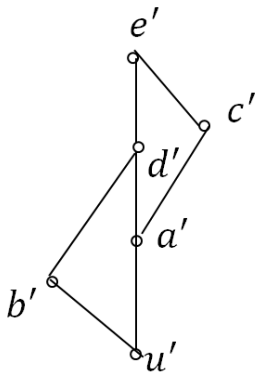

Рис. 14

Следует пояснить, что равные решетки, как и вершины равных треугольников, могут отличаться расположением своих элементов на диаграмме и их обо-

Пространство педагогических исследований. 2026. Т. 3. № 1
ISSN 3034-1760

значениями. При этом в теории решеток равные решетки не различаются между собой и считаются одной и той же решеткой.

Отметим, что определение изоморфизма с помощью общепринятого в абстрактной алгебре отображения φ элементов одной решетки в другую вызывает большие затруднения у учащихся.

Определение 8. Автоморфизмом решетки называется взаимно-однозначное соответствие между элементами этой же решетки, удовлетворяющими условиям 1 и 2 из определения изоморфизма.

Например, легко проверить, что автоморфизмом решетки, представленной на рис. 12, является следующее взаимно-однозначное соответствие между ее элементами:

$$u \to u, a \to b, b \to a, c \to d, d \to c, e \to e.$$

Отметим, что организуется и поисковая деятельность учащихся в решении задачи о нахождении всех n-элементных решеток при $n \leq 4$. Для этого необходимы следующие понятия.

Определение 9. Если не существует элемент x, отвечающий условию $b > x > a$, то элемент b называется *покрытием* элемента или *покрывающим* этот элемент a.

Определение 10. Множество элементов решетки называется *цепью,* если любые два элемента этого множества являются сравнимыми.

Из определения операций суммы и произведения элементов решетки следует, что существует только одна одноэлементная решетка с элементом a, для которого $a + a = a$ и $a \cdot a = a$. Эта решетка изображена точкой a на рис. 15.

Согласно определению этих операций, существует только одна двухэлементная решетка со сравнимыми элементами (вершинами графа) a и b, для которых $a + b = b$, и $a \cdot b = a$ (см. рис. 16). Очевидно, что имеют место две решетки, трехэлементная и четырехэлементная, не имеющие несравнимых элементов и поэтому являющиеся цепью (см. рис. 17).

Из определения операций на решетке с несравнимыми элементами следует, что в четырехэлементной решетке может быть только два несравнимых элемента a и b, для которых $a + b =$ с и $a \cdot b = d$ (см. рис. 18).

Для дальнейшей поисковой деятельности также необходимо ввести ряд определений.

Рис. 15

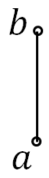

Рис. 16

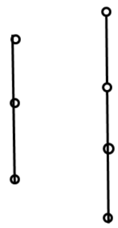

Рис. 17

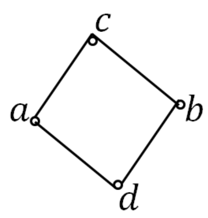

Рис. 18

Определение 11. Цепь в решетке называется *максимальной*, если в этой решетке не существует цепи с большим количеством элементов.

Очевидно, в решетке, представленной на рис. 19, имеется одна максимальная цепь с пятью элементами.

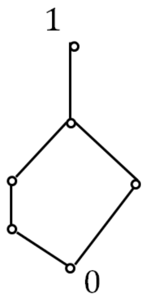

Рис. 19

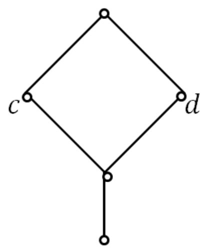

Рис. 20

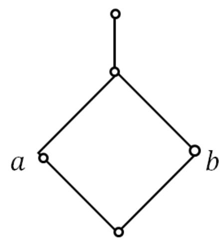

Рис. 21

Определение 12. Элемент решетки называется *наименьшим* элементом этой решетки, если он меньше любого другого элемента этой решетки и обозначается символом 0 (см. 0 на рис. 19).

Предположим, что в решетке существуют два наименьших элемента a и b. Так как a – наименьший элемент, то $a < b$. Аналогично рассуждая, получаем, что $b < a$. Обнаружили противоречие. Следовательно, в решетке существует единственный наименьший элемент.

Определение 13. Элемент решетки называется *наибольшим* элементом этой решетки, если он больше любого другого ее элемента и обозначается символом 1 (см. рис. 19). Аналогично доказывается, что в решетке есть единственный наибольший элемент.

Определение 14. Элемент решетки называется ее *атомом,* если он покрывает наименьший элемент – нуль (0).

Определение 15. Если единица решетки 1 покрывает какой-то элемент, то он называется *коатомом* решетки.

В решетке, представленной на рис. 21, элементы a и b – атомы, на рис. 20 – элементы c и d – коатомы.

Пусть на одном и том же множестве определены две решетки A и B.

Определение 16. Пусть даны два произвольных элемента a и b решетки A. Решетка B называется *двойственной* решетке A, если она получена из решетки A заменой неравенства $a \geq b$ в решетке A на неравенство $b \geq a$ в решетке B.

На рис. 22–23 приведены диаграммы двойственных решеток с элементами a и b.

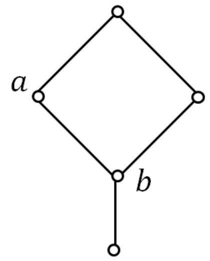

Рис. 22

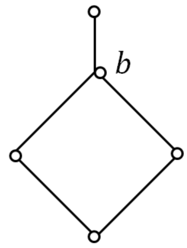

Рис. 23

Итак, даны все необходимые определения для решения следующей задачи

Задача 1. Найти все – элементные решетки при $n \leq 6$.

При нахождении указанных решеток сначала учитывается число их атомов и коатомов, затем – число максимальных цепей и то, какие решетки являются двойственными друг другу.

На рис. 24 приведены все диаграммы n-элементных решеток при $n = 5$.

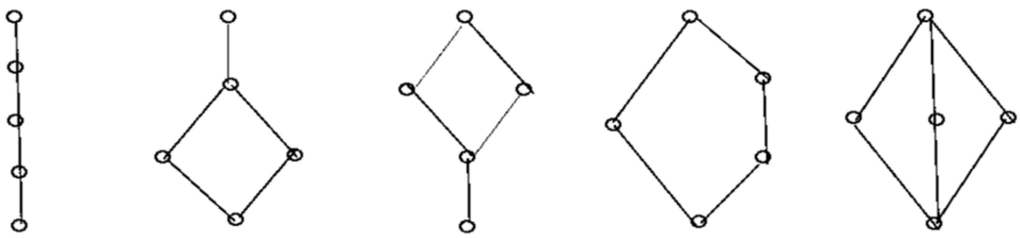

Рис. 24

Отметим, что существует всего 15 шестиэлементных решеток.

Далее можно продолжить обучение элементам теории решеток, основываясь на работе математика Э. Фрида «Элементарное введение в абстрактную алгебру»[1] и учебном пособии Е. А. Перминова[2] для школы. В частности, следует дать определения решетки как алгебраической структуры, привести таблицы Кэли операций пересечения и объединения на решетке (названных в статье для первоначального обучения *решеточным сложением и умножением*).

[1] Фрид Э. Элементарное введение в абстрактную алгебру. Москва: Мир, 1979. 260 с.

[2] Перминов Е. А. Дискретная математика: учебное пособие для 8–9-х классов средней общеобразовательной школы. Екатеринбург: ИРРО, 2004. 206 с.

Также целесообразно продолжить поисковую деятельность учащихся, предложив им описание всех n-элементных решеток для $n = 7$ и их автоморфизмов (всего имеется 73 таких решетки). Это создаст предпосылки к их обучению использованию систем компьютерной математики DELFI, GAP и т. д. для дальнейшего изучения абстрактной алгебры на математических и иных направлениях прикладной математики в университетах.

На основе обучения представленным нами элементам теории решеток можно предложить учащимся и другие темы исследований. Например, в монографии Г. Биркгофа поставлена следующая проблема: найти все конечные решетки, для которых каждый автоморфизм соответствующего им графа являлся бы решеточным автоморфизмом[1]. В работе Е. А. Перминова[2] такие решетки названы *диаграммными* и доказано, что каждая конечная решетка может быть вложена в конечную диаграммную решетку.

Задача 2. Найти все диаграммные n-элементные решетки при $n \leq 7$.

В работе Г. Биркгофа по теории решеток и ее основным направлениям[3] также выявлен рад проблем:

- определение сложности конечной решетки как числа пересечений линий на оптимальной диаграмме этой решетки, отмечается необходимость исследования данного понятия;

- в классе решеток $\mathfrak{R}$ установить, для каких натуральных чисел n существует решетка сложности n ?

Поясним, что *оптимальной* называется диаграмма решетки, которая из множества всех различных ее диаграмм содержит наименьшее число пересечений линий.

Задача 3. Для каждого натурального n найти решетку сложности n.

Выводы

В результате анализа научной и методической литературы обоснован тезис о том, что профильное обучение элементам теории решеток имеет фундаментальное значение в процессе освоения математики в классах не только с углубленным изучением математики, но и физики, химии и некоторых других предметов, в том числе в изучении порядка и симметрии объектов в науке, природе и даже в искусстве.

Подтверждается тот факт, что в развитии абстрактного мышления школьников особенно важна роль такой его компоненты, как нелинейное мышление.

[1] Биркгоф Г. Теория решеток. Москва: Наука, 1984. С. 25.

[2] Перминов Е. А. О диаграммных решетках // ВИНИТИ. № 340-85. ДЕП. 1985. 9 с.

[3] Биркгоф Г. Теория решеток. Москва: Наука, 1984. 568 с.

Подчеркивается значение полученных результатов исследования: впервые разработана методика внедрения в содержание профильного обучения в школе понятий решетки, максимальной цепи решетки, изоморфизма и автоморфизма решеток, а также некоторых других понятий теории решеток, важных в описании их строения.

Кроме того, отметим важность разработки методики обучения решению исследовательских задач перечисления конечных решеток, анализа решеток с заданными свойствами их групп автоморфизмов (симметрий), в том числе решения трех проблем из известной работы по теории решеток крупного математика Г. Биркгофа.

Литература / References

Алфутова В. В., Устинов А. В. *Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ.* Москва: МЦНМО, 2005. 320 с.

Alfutova V. V., & A. V. Ustinov. *Algebra and Number Theory: A Collection of Problems for Mathematics Schools*. Moscow: MCNMO, 2005. 320 p. (in Russian)

Антипов И. Н., Виленкин Н. Я. и др. *Факультативный курс. Избранные вопросы математики. Для учащихся 7–8 классов*. Москва: Просвещение, 1978. 192 с.

Antipov I. N., Vilenkin N. Ya., et al. *Optional Course: Selected Problems in Mathematics: For Students of Grades 7–8.* Moscow: Prosveshchenie, 1978. 192 p. (In Russian)

Биркгоф Г. *Теория решеток*. Москва: Наука, 1984. 568 с.

Birkhoff G. *Lattice Theory.* Moscow: Nauka, 1984. 568 p. (In Russian)

Вейль Г. *Симметрия*. Москва: Наука, 1968. 190 с.

Weyl H. *Symmetry.* Moscow: Nauka, 1968. 190 p. (In Russian)

Волошинов А. В. *Математика и искусство: Книга для тех, кто не только любит математику или искусство, но и желает задуматься о природе прекрасного и красоте науки.* Москва: Просвещение, 2000. 399 с.

Voloshinov A. V. *Mathematics and Art: A Book for Those Who Not Only Like Mathematics or Art but Also Wish to Reflect on the Nature of Beauty and the Beauty of Science.* Moscow: Prosveshchenie, 2000. 399 p. (In Russian)

Давыдов В. В. *Виды обобщения в обучении*. Москва: Педагогическое общество России, 2000. 480 с.

Davydov V. V. *Types of Generalization in Instruction.* Moscow: Pedagogicheskoe obshchestvo Rossii, 2000. 480 p. (In Russian)

Деменчук В. В. *На пороге алгебры*. Минск: Вышэйшая школа, 1987. 144 с.

Demenchuk V. V. *On the Threshold of Algebra.* Minsk: Vysheishaia shkola, 1987. 144 p. (In Russian)

Дополнительные главы по курсу математики: учебное пособие по факультативному курсу для учащихся 9 классов, составитель П. В. Стратилатов. Москва: Просвещение, 1974. 142 с.
Additional Chapters to the Mathematics Course: A Supplementary Textbook for an Optional Course for Grade 9 Students, compiled by P. V. Stratilatov. Moscow: Prosveshchenie, 1974. 142 p. (In Russian)

Калужнин Л. А., Сущанский В. А. *Преобразования и перестановки.* Москва: Наука, 1974. 117 с.
Kaluzhnin L. A., Sushchansky, V. A. *Transformations and Permutations.* Moscow: Nauka, 1974. 117 p. (In Russian)

Красовский Н. Н. Математическое моделирование в школе. *Известия Уральского государственного университета.* 1995, № 4, с. 12–24.
Krasovsky N. N. Mathematical Modeling at School. *Proceedings of the Ural State University,* 1995, no. 4, pp. 12–24. (In Russian)

Математическая энциклопедия: в 5 т., т. 1. (А–Г), под редакцией И. М. Виноградова. Москва: Советская энциклопедия, 1979. 1152 стб.
Mathematical Encyclopedia: in 5 vols., vol. 1 (A–G), edited by I. M. Vinogradov. Moscow: Sovetskaia entsiklopediia, 1979. 1152 cols. (In Russian)

Перминов Е. А. *Дискретная математика: учебное пособие для 8–9-х классов средней общеобразовательной школы*. Екатеринбург: ИРРО, 2004. 206 с.
Perminov E. A. *Discrete Mathematics: A Textbook for Grades 8–9 of Secondary General Education School.* Yekaterinburg: IRRO, 2004. 206 p. (In Russian)

Перминов Е А. *Методическая система обучения дискретной математике студентов педагогических направлений*. Екатеринбург: Издательство Российского государственного профессионально-педагогического университета, 2015. 256 с.
Perminov E. A. *Methodological System for Teaching Discrete Mathematics to Students of Pedagogical Programs.* Ekaterinburg: Izdatelstvo Rossiiskogo gosudarstvennogo professionalnopedagogicheskogo universiteta, 2015. 256 p. (In Russian)

Перминов Е. А. О диаграммных решетках. *ВИНИТИ*, № 340-85ДЕП, 1985, 9 с.
Perminov E. A. On Diagram Lattices. *VINITI*, no. 340-85DEP, 1985. 9 p. (In Russian)

Перминов Е. А. О методике обучения дисциплине «Элементы теории формальных языков» будущих инженеров. *Пространство педагогических исследований*, 2024, т. 1, № 4, с. 34–52. https://doi.org/10.23859/3034-1760.2024.93.56.003; EDN: LAQXIM
Perminov E. A. On Methodology of Teaching “Elements of the Theory of Formal Languages” to Future Engineers. *Education Research Environtment*, 2024, vol. 1, no. 4, pp. 34–52. (In Russian) https://doi.org/10.23859/3034-1760.2024.93.56.003; EDN: LAQXIM

Перминов Е. А. О методологии отражения элементов современной алгебры в содержании математической и методической подготовки будущих учителей. *Вестник Вятского государственного гуманитарного университета*, 2014, № 8, с. 115–120. EDN: SYACZZ
Perminov E. A. On the Methodology of Reflecting Elements of Modern Algebra in the Content of Mathematical and Methodological Training of Future Teachers. *Bulletin of Vyatka State Humanities University*, 2014, no. 8, pp. 115–120. (In Russian) EDN: SYACZZ

Перминов Е. А. О развивающем обучении в формировании представлений о понятиях изоморфизма и автоморфизма графов и решеток. *Математика в современном мире: материалы II Всероссийской научно-практической конференции, посвященной 160-летию видного российского математика Д. А. Граве (Вологда, 19–23 сентября 2023 г.)*, под редакцией В. А. Тестова, Н. В. Масловой. Вологда: ВоГУ, 2023, с. 151–155. EDN: DAZXYE

Perminov E. A. On Developmental Instruction in Forming Concepts of Graph and Lattice Isomorphism and Automorphism. In: *Mathematics in the Modern World: Proceedings of the II All-Russian Scientific and Practical Conference Dedicated to the 160th Anniversary of the Prominent Russian Mathematician D. A. Grave (Vologda, September 19–23, 2023),* edited by V. A. Testov and N. V. Maslova. Vologda: VoGU, 2023, pp. 151–155. (In Russian) EDN: DAZXYE

Перминов Е. А. О роли дискретной математики в изучении понятий хаоса, порядка и фрактала в вузах. *Материалы XVI Колмогоровских чтений: 3-я Международная научно-методическая конференция (Кострома, 7–9 декабря 2021 г.)*, под редакцией В. В. Секованова. Кострома: Костромской государственный университет, 2021, с. 37–42. EDN: YGCYMI

Perminov E. A. On the Role of Discrete Mathematics in the Study of the Concepts of Chaos, Order, and Fractal in Higher Education Institutions. In: *Proceedings of the XVI Kolmogorov Readings: 3rd International Scientific and Methodological Conference (Kostroma, December 7–9, 2021),* edited by V. V. Sekovanov. Kostroma: Kostromskoi gosudarstvennyi universitet, 2021, pp. 37–42. (In Russian) EDN: YGCYMI

Тестов В. А. О формировании понятия группы. *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона: периодический межвузовский сборник научно-методических работ,* вып. 7, под редакцией Е. М. Вечтомова. Киров: ВятГГУ, 2005. 276 с.

Testov V. A. On the Formation of the Concept of Group. In: *Mathematical Bulletin of Pedagogical Institutes and Universities of the Volga-Vyatka Region: Periodical Interuniversity Collection of Scientific and Methodological Works*, issue 7, edited by E. M. Vechtomov. Kirov: VyatGGU, 2005. 276 p. (In Russian)

Тестов В. А., Перминов Е. А. Трансдисциплинарная роль физико-математических дисциплин в современном естественнонаучном и инженерном образовании. *Образование и наука*, 2023, т. 25, № 7, с. 14–43. https://doi.org/10.17853/1994-5639-2023-7-14-43; EDN: ZJHRWV

Testov V. A., Perminov E. A. Transdisciplinary Role of Physical and Mathematical Disciplines in Contemporary Natural Science and Engineering Education. *Education and Science*, 2023, vol. 25, no. 7, pp. 14–43. (In Russian) https://doi.org/10.17853/1994-5639-2023-7-14-43; EDN: ZJHRWV

Антипов И. Н., Виленкин Н. Я. и др. *Факультативный курс. Избранные вопросы математики. Для учащихся 9 классов.* Москва: Просвещение, 1979. 191 с.

Antipov I. N., Vilenkin, N. Ya., et al. *Optional Course: Selected Problems in Mathematics: For Grade 9 Students.* Moscow: Prosveshchenie, 1979. 191 p. (In Russian)

Фрид Э. *Элементарное введение в абстрактную алгебру*. Москва: Мир, 1979. 260 с.

Fried E. *An Elementary Introduction to Abstract Algebra.* Moscow: Mir, 1979. 260 p. (In Russian)

Информация об авторе

Евгений Александрович Перминов – доктор педагогических наук, доцент, perminov_ea@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-8807-2476, профессор кафедры математических и естественнонаучных дисциплин Уральского государственного педагогического университета (д. 26, пр. Космонавтов, 620091 Екатеринбург, Россия); **Evgeniy A. Perminov** – Doctor of Pedagogical Sciences, Associate Professor, perminov_ea@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-8807-2476, Professor of the Department of Mathematical and Natural Sciences, Ural State Pedagogical University (26, pr. Kosmonavtov, 620091 Ekaterinburg, Russia).

Статья поступила в редакцию – 12.01.2026; одобрена после рецензирования – 26.01.2026; принята к публикации – 06.02.2026.

The article was submitted – 12.01.2026; approved after reviewing – 26.01.2026; accepted for publication – 06.02.2026.