Пространство педагогических исследований. 2024. Т. 1, № 4 (4). С. 53–64.
Education Research Environment, 2024, vol. 1, no. 4 (4), pp. 53–64.

Научная статья
УДК 372.851
https://doi.org/10.23859/3034-1760.2024.35.22.004

Особенности математического моделирования при обучении теории вероятностей

Наталия Николаевна Яремко
Московский педагогический государственный университет
Москва, Россия
yaremki@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0003-1491-624X
Natalia N. Yaremko
Moscow Pedagogical State University
Moscow, Russia
yaremki@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0003-1491-624X

Юлия Андреевна Яковлева
Московский педагогический государственный университет
Россия, Москва
mayflower2299@gmail.com, https://orcid.org/0009-0008-1020-3449
Julia A. Yakovleva
Московский педагогический государственный университет
Москва, Россия
mayflower2299@gmail.com, https://orcid.org/0009-0008-1020-3449

Аннотация. В статье рассматриваются некоторые особенности применения метода математического моделирования при обучении школьников теории вероятностей. Выделены основные вероятностные математические модели и их существенные признаки. Охарактеризованы требования, предъявляемые к вероятностной модели (адекватности и достаточной простоты).

Ключевые слова: методика обучения теории вероятностей, математическое моделирование, вероятностная модель, признаки вероятностной модели, адекватность математической модели, достаточная простота математической модели

Для цитирования: *Яремко Н. Н., Яковлева Ю. А.* Особенности математического моделирования при обучении теории вероятностей // Пространство педагогических исследований. 2024. Т. 1, № 4 (4). С. 53–64. https://doi.org/10.23859/3034-1760.2024.35.22.004

Features of the application of mathematical modeling in teaching probability theory

Abstract. The article deals with the features of the application of the mathematical modeling method in teaching probability theory. The main probabilistic mathematical models and their features are highlighted in the article. The requirements for the probabilistic model (adequacy and sufficient simplicity) are also characterized in it.
Keywords: methods of teaching probability theory, mathematical modeling, probabilistic model, signs of a probabilistic model, the requirement of adequacy, the requirement of sufficient simplicity.
For citation: Yaremko N. N., Yakovleva J. A. Features of the application of mathematical modeling in teaching probability theory. *Education Research Environment*, 2024, vol. 1, no. 4 (4), pp. 53–64. (In Russian). https://doi.org/10.23859/3034-1760.2024.35.22.004

Введение

Одной из приоритетных целей изучения математики в 7–9 классах является «формирование умения распознавать проявления математических понятий, объектов и закономерностей в реальных жизненных ситуациях, проявления зависимостей и закономерностей, формулировать их на языке математики и создавать математические модели, интерпретировать и оценивать полученные результаты»[1]. Основным средством для формирования этих умений является обучение методу математического моделирования.

Сама идея описания на языке математики реальных процессов восходит, по существу, ко временам Ньютона. Но настоящее «рождение» этой методологии пришлось на середину XX века. Это было связано с необходимостью изучения процессов, воспроизводство которых в эксперименте очень дорого, опасно или невозможно (процессы, протекающие в ядерном реакторе, возвращение тела из космоса в земную атмосферу и пр.). С появлением и развитием ЭВМ стало понятно, что это не только средства, позволяющие ускорить громоздкие вычисления, но и принципиально новый вид экспериментальной установки, возможности которой позволяют воспроизводить, имитировать с достаточно большой степенью детализации процессы, происходящие в окружающем мире.

Одним из основоположников современного математического моделирования является советский и российский математик А. А. Самарский[2]. Его методы, в основе которых лежит триада «модель – алгоритм – программа», признаны во всем мире и применяются для моделирования самых сложных процессов. Первым этапом математического моделирования по А. А. Самарскому является выбор (или построение) математической модели – «эквивалента» изучаемого

[1] Федеральная рабочая программа основного общего образования. Математика (базовый уровень): для 5–9 классов образовательных организаций. Москва: Институт стратегии развития образования, 2023. 106 с.

объекта, который в математической форме отражает важнейшие его свойства – законы, которым он подчиняется, и связи, присущие составляющим его частям»[1].

Стремительно ускоряющаяся в последнее время математизация различных областей человеческой деятельности приводит к неизбежному сближению «абстрактной» и «прикладной» математики. Поэтому обучение математическому моделированию становится одним из центральных моментов всего школьного курса математики. Здесь нельзя не согласиться с А. Г. Мордковичем, который отводит понятиям «математическое моделирование», «математический язык» и «математическая модель» роль «идейного стержня», при наличии которого «математика предстает перед учащимися не как набор разрозненных фактов, которые учитель излагает только потому, что они есть в программа, а как цельная развивающая дисциплина общекультурного характера»[2].

Основным средством обучения стохастике являются сюжетно-практические задачи, через решение задач происходит накопление единичных фактов и примеров ситуаций вероятностного характера[3]. Д. В. Маневич отмечал, что «поиск решения задач по теории вероятностей вызывает у учащихся большие затруднения. Учащиеся теряются в выборе подходов к решению задач, так как известные им методы решения математических задач, как правило, мало пригодны для решения теоретико-вероятностных задач»[4].

В качестве основного метода решения задач по теории вероятностей В. В. Фирсов. А. Плоцки, С. В. Щербатых и другие предлагают использовать метод математического моделирования. Этим методом решаются прикладные задачи в 10–11 классах, а основы метода математического моделирования закладываются в 7–9 классах при решении простейших сюжетно-практические задач.

А. Плоцки писал: «Формулировка, подход к решению и решение задач по теории вероятностей – математическое творчество»[5], «каждая задача по теории

---

[1] Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. Москва: Физматлит, 2001, С. 7–8.

[2] Мордкович А. Г. О некоторых проблемах школьного математического образования // Актуальные проблемы обучения математике и информатике в школе и вузе: материалы II Международной научной конференции (Москва, 2 – 4 октября 2014 г.). Москва: МПГУ, 2014. С. 123–128.

[3] Болотюк В. А. Формирование вероятностно-статистических представлений у учащихся в курсе алгебры основной школы: автореф. дис. … канд. пед. наук. Омск, 2002. 25 с.

[4] Маневич Д. В. Совершенствование содержания общего среднего образования на основе теории вероятностей и статистики: автореф. дис. … канд. пед. наук. Ташкент, 1990. 36 с.

[5] Плоцки А. Вероятность в задачах для школьников: книга для учащихся. Москва: Просвещение, 1996. С. 176.

вероятностей решается в определенной вероятностной модели», но «мир случайностей – это не только мир испытаний, все результаты которых одинаково вероятны»[1] и поэтому «не всегда эта модель классическая»[2].

Основная часть

На первых этапах изучения теории вероятностей учащиеся решают задачи, в которых требуется ответить на вопрос: «Какова вероятность того, что…», т. е. найти и обосновать способ вычисления вероятности некоторого случайного события и затем вычислить эту вероятность в соответствии с данным способом.

Основная трудность при решении вероятностных задач заключается в том, что не существует единого способа вычисления вероятности, который мог бы быть применен к любой задаче. Это связано со многими обстоятельствами и, в частности, с теми условиями, в которых рассматриваемые события наступают, а также с трактовкой описанных в задаче случайных событий, т. е.:

1) одно и то же событие в разных условиях может протекать по-разному;

2) одно и то же событие в одних и тех же условиях может быть интерпретировано разными способами.

Поэтому задача формирования умений школьников осуществлять перевод ситуации, описанной в задаче, на язык теории вероятностей и находить способ вычисления вероятности искомого события (*строить вероятностную модель*) играет важную роль в обучении теории вероятностей.

Анализ учебников показывает, что в школе рассматривается три основных способа нахождения вероятности случайного события:

1) на основании понятия равновозможности элементарных исходов;

2) на основании известных вероятностей других событий, связанных определенным образом с описанным в задаче случайным событием;

3) на основании конкретных опытных данных.

В соответствии с этими способами можно выделить следующие *вероятностные математические модели.*

1. Классическое определение вероятности случайного события (8 класс).

2. Геометрическое определение вероятности случайного события (9 класс).

3. Статистическое определение вероятности случайного события (7 класс).

4. Основные теоремы о вероятностях случайных событий.

4.1. Вероятность события, противоположного данному (8 класс).

4.2. Условная вероятность (8 класс).

4.3. Вероятность суммы событий: 1) для совместных событий; 2) для несовместных событий (8 класс).

---

[1] Плоцки А. Вероятность в задачах для школьников: книга для учащихся. Москва: Просвещение, 1996. С. 177.

[2] Там же. С. 180.

4.4. Вероятность произведения события: 1) для зависимых событий; 2) для независимых событий (8 класс).

5. Следствия из основных теорем.

5.1 Формула полной вероятности. Формула Байеса (10 класс).

5.2 Схема Бернулли (9 класс).

Эти вероятностные модели являются *основными*, так как к ним сводятся практически школьные задачи по теории вероятностей. Каждая из выделенных моделей отражает некоторые особенности описанного в задаче стохастического эксперимента, которые рассматриваются как признаки модели. В качестве примера рассмотрим задачу.

Задача 1. Бросают две игральные кости. Какова вероятность того, что 5 очков выпадет хотя бы на одной из них?

Главной особенностью этого эксперимента является наличие в нем *конечного числа равновозможных элементарных исходов* (пары чисел: (1;1), (1;2), …, (6;6)), что является признаком модели при классическом определении вероятности. Поэтому любое случайное событие может быть представлено совокупностью благоприятствующих ему элементарных исходов. Более детальный анализ этой ситуации приводит к тому, что и искомое случайное событие: «выпадение 5-ти очков хотя бы на одной кости»,– может быть интерпретировано поразному. Это приводит по крайней мере к трем различным вероятностным моделям (рис. 1.)

В каждом случае были учтены и отражены в соответствующих моделях важнейшие особенности стохастического эксперимента: наличие конечного числа равновозможных элементарных исходов (1-й, 2-й, 3-й способы); возможность совместного наступления двух событий (2-й способ); наступление двух взаимно противоположных событий (3-й способ). Поэтому каждая из этих моделей служит *адекватным описанием* соответствующей задачной ситуации.

Требование *адекватности* исходной ситуации является ключевым для любой математической модели. Отличительной особенностью вероятностных моделей является тот факт, что одна и та же ситуация может приводить не только к разным моделям, но и к разным численным результатам, причем каждая из рассматриваемых моделей будет соответствовать данной ситуации. Эту особенность следует учитывать и демонстрировать учащимся на конкретных примерах.

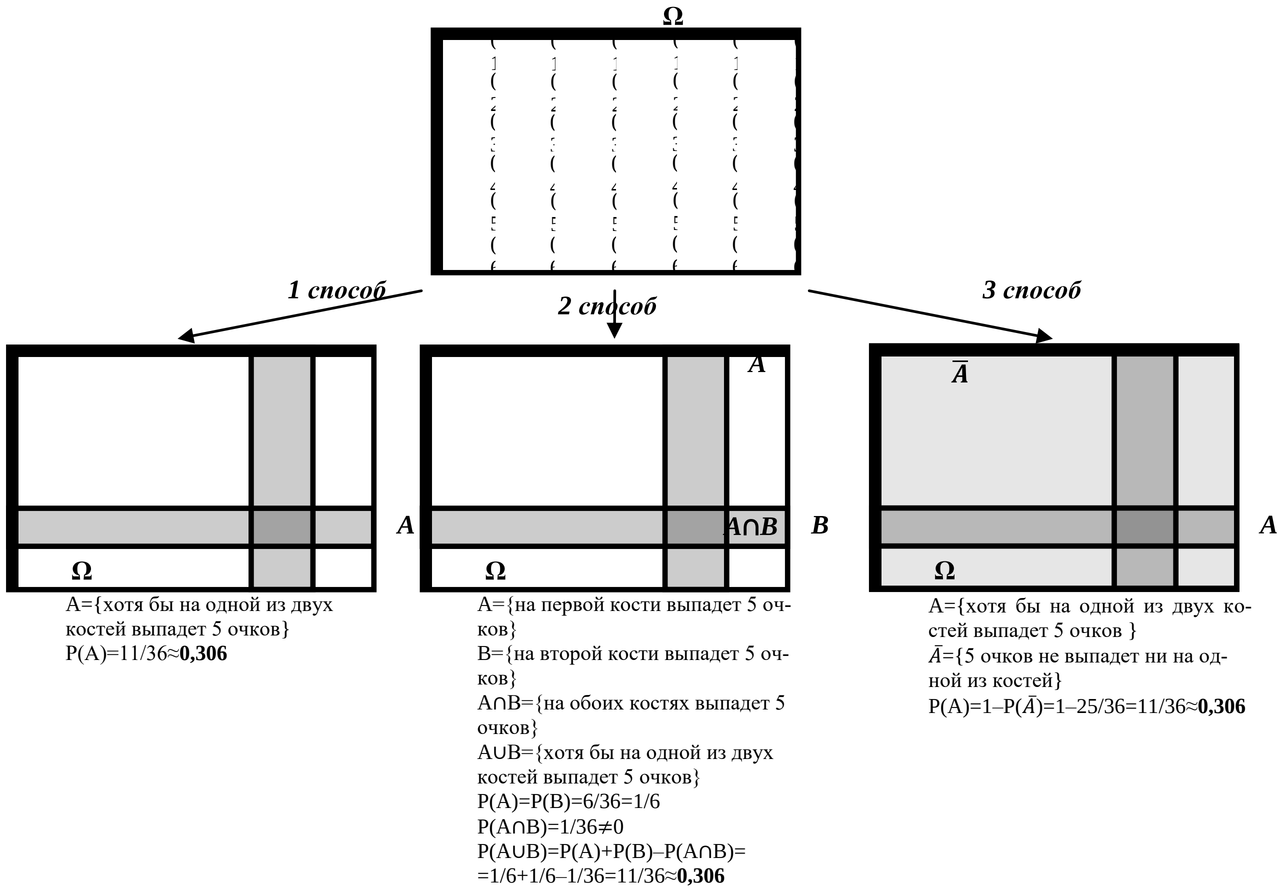

Рис. 1. Вариативность выбора вероятностной модели

Пример 1. (парадокс Бертрана) Для некоторой окружности случайным образом выбирается хорда. Какова вероятность того, что эта хорда длиннее стороны правильного треугольника, вписанного в данную окружность?[1]

Парадокс в том, эта задача приводит как минимум к трем различным вероятностным моделям, каждая из которых адекватно отражает стохастический эксперимент, но полученные ответы отличаются: 1) ≈ 0,333; 2) 0,5; 3) 0,25.

Сам Ж. Бертран отмечал, что ни одно из трех решений не является неверным, также, как ни одно из них не может быть единственно верным[2].

Подобный пример, но уже с 8-ю различными моделями и 6-ю различными ответами, был рассмотрен в докладе П. В. Семенова[3].

---

[1] Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. Москва: Мир, 1990. С. 50.

[2] Bertrand J. Calcul des probabilités. Paris, 1889. C. 4.

[3] Семенов П. В. Вероятность остроугольности треугольника как задача открытого типа // Математика и проблемы образования: материалы 41–го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов (Киров, 22–24 сентября 2022 г.). Киров, 2022. С. 30–31.

ISSN 3034-1760

Пример 2. Какова вероятность того, что случайно выбранный (нарисованный) треугольник окажется остроугольным? (1) 0,25; 2) ≈ 0,429; 3) ≈ 0,2956; 4) 0; 5) ≈ 0,3178; 6) ≈ 0,3726)

Можно предложить учащимся более простой пример, который не только иллюстрирует вышеуказанную особенность вероятностных задач, но и связывает разные подходы к определению вероятности случайного события.

Задача 2. Бросают игральную кость. Какова вероятность того, что а) выпадет 5 очков; б) выпадет четное число очков?

Обычно такие задачи решаются по классическому определению вероятности:

Ω={1; 2; 3; 4; 5; 6}; а) A={выпадет 5 очков}={5}; P(A)=1/6≈1,667;

б) A={выпадет четное число очков}={2; 4; 6}; P(A)=3/6=0,5.

В качестве упражнения можно предложить следующий эксперимент. С помощью компьютерной программы (например, табличного процессора EXEL) сгенерировать достаточно большое число подбрасываний кубика и найти относительные частоты выпадения чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 (рис. 2).

A2 =ЦЕЛОЕ(СЛЧИС()*(7-1)+1)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Результаты 100 подбрасываний кубика									
2	4	5	4	1	4	1	5	5	5	3
3	6	1	4	1	1	2	6	1	6	4
4	6	3	6	6	2	4	5	1	3	1
5	3	3	6	1	4	3	2	3	1	2
6	1	1	3	5	4	1	1	2	3	2
7	5	1	4	3	1	4	1	1	1	2
8	6	3	1	1	2	3	6	1	5	5
9	6	1	6	6	1	4	4	6	3	4
10	3	3	3	3	2	6	4	1	3	5
11	2	5	4	4	3	6	5	1	6	3

Рис. 2. Результаты 100 подбрасываний игральной кости

Тогда относительные частоты будут следующими (см. таблицу).

Таблица

Относительные частоты выпадения очков при подбрасывании кости

Число выпавших очков	1	2	3	4	5	6
Частота	26	10	20	16	12	16
Относительная частота	**0,26**	**0,1**	**0,2**	**0,16**	**0,12**	**0,16**

Из таблицы видно, что частота выпадения 5 очков (событие A в пункте а)) в данном конкретном случае отличается от соответствующей вероятности, полученной в предположении, что все элементарные исходы равновозможны. Так как относительные частоты обладают теми же свойствами, что и вероятности, то можно найти относительную частоту выпадения четного числа очков (событие A в пункте б)): $\frac{10+16+16}{100} = \frac{42}{100} = 0{,}42$, которая также несколько отличается от соответствующей вероятности.

Подобные примеры показывают, что даже привычные задачные ситуации можно «обыграть» по-разному и формируют у учащихся целостное представление о вероятности.

Вновь обращаясь к задаче 1, отметим еще одну важную особенность. Возможность различных интерпретаций искомого события явилось основанием для построения различных математических описаний, т. е. дало возможность *выбора вероятностной модели* (рис. 1).

В первом случае искомое событие было интерпретировано как случайное событие A на множестве, состоящем из конечного числа равновозможных исходов, поэтому для вычисления вероятности его наступления $P(A)$ потребовалось применить только классическую вероятностную схему и формулу $P(A) = m/n$.

Во втором случае это же событие было интерпретировано как объединение двух событий $A \cup B$, поэтому для вычисления вероятности $P(A \cup B)$ его наступления потребовалось: 1) применить классическую вероятностную схему для вычисления вероятности каждого из составляющих его событий A и B; 2) установить совместность данных событий; 3) установить независимость этих событий; 4) вычислить вероятность $P(A \cap B)$; 4) применить формулу для вычисления вероятности объединения двух совместных событий $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$.

В третьем случае искомое событие A было выражено через противоположное ему событие $\bar{A}$, поэтому для вычисления вероятности $P(A)$ его наступления потребовалось: 1) применить классическую вероятностную схему для вычисле-

ISSN 3034-1760

ния вероятности события $\bar{A}$; 2) применить формулу для вычисления вероятности события, противоположного данному $P(A)=1–P(\bar{A})$.

Возможность выбора вероятностной модели приводит еще к одному требованию, предъявляемому к математическим (а значит, и вероятностным) моделям – требованию *достаточной простоты*. Это требование коротко можно описать так: если есть возможность построения разных вероятностных моделей (адекватно описывающих задачную ситуацию), то целесообразно выбирать ту из них, которая будет наиболее простой, удобной и понятной.

Заключение

Таким образом, можно выделить некоторые особенности применения метода математического моделирования в стохастике и, в частности, в теории вероятностей.

1. Спектр изучаемых в школе вероятностных моделей ограничен классическим, статистическим и геометрическим определениями вероятности, а также основными теоремами и следствиями из них. Сюда же можно отнести аксиоматическое определение вероятности, которое является обобщающим.

2. Каждая из выделенных моделей отражает разные особенности описанного в задаче стохастического эксперимента (*признаки модели*):

– *классическое определение вероятности:* равновозможность, конечность (свойства пространства элементарных исходов);

– *геометрическое определение вероятности:* равновозможность, непрерывность (элементарное событие описывается точкой на числовой прямой или отрезке);

– *статистическое определение вероятности;*

– *вероятность события, противоположного данному:* наличие двух взаимно противоположных событий;

– *условная вероятность*: наличие события-условия, предшествующего данному событию и меняющему его вероятность;

– *вероятность объединения событий*: совместность / несовместность;

– *вероятность пересечения события*: зависимость / независимость;

– *формула полной вероятности*: поэтапность эксперимента, наличие полной группы событий-гипотез;

– *схема Бернулли:* последовательность из n независимых испытаний с двумя исходами.

3. Основными требованиями, предъявляемыми к вероятностной модели, являются требование *адекватности* и *достаточной простоты*. Адекватность модели проявляется в том, что в ней должны быть отражены *все* особенности эксперимента, которые являются *признаками* данной модели. (например, фор-

мула $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$ может быть вероятностной моделью некоторой ситуации, если речь идет об объединении двух *несовместных* событий, и, наоборот, не может быть использована в качестве вероятностной модели, если события *A* и *B совместны*). Требование достаточной простоты учитывается, когда имеется возможность выбора вероятностной модели (например, во многих задачах, где требуется вычислить вероятность наступления хотя бы одного из данных событий, легче перейти к противоположному событию: «хотя бы один» – «ни одного»).

Список литературы / References

Болотюк В. А. *Формирование вероятностно-статистических представлений у учащихся в курсе алгебры основной школы*: автореф. дис. … канд. пед. наук. Омск, 2002. 25 с. (In Russian)

Bolotyuk V. A. *Formation of probabilistic and statistical representations among students in the course of algebra of primary school*. PhD thesis. Omsk State Pedagogical University, 2002. (In Russian)

Высоцкий И. Р., Ященко И. В. *Вероятность и статистика: учебник для 7–9 классов. Ч. 1*. Москва: Просвещение, 2023. 177 с. (In Russian)

Vysotsky I. R., Yashchenko I. V. *Probability and statistics: textbook for grades 7–9. Part 1*. Moscow: Prosveshchenie, 2023. (In Russian)

Высоцкий И. Р., Ященко И. В. *Вероятность и статистика: учебник для 7–9 классов. Ч. 2*. Москва: Просвещение, 2023. 111 с. (In Russian)

Vysotsky I. R., Yashchenko I. V. *Probability and statistics: textbook for grades 7–9. Part 2*. Moscow: Prosveshchenie, 2023. (In Russian)

Маневич Д. В. *Совершенствование содержания общего среднего образования на основе теории вероятностей и статистики*: автореф. дис. … канд. пед. наук. Ташкент, 1990. 36 с. (In Russian)

Manevich D. V. *Improving the content of general secondary education based on probability theory and statistics*. PhD thesis. Tashkent, 1990. (In Russian)

Мордкович А. Г. О некоторых проблемах школьного математического образования // *Актуальные проблемы обучения математике и информатике в школе и вузе: материалы II Международной научной конференции (Москва, 2 – 4 октября 2014 г.)*. Москва: МПГУ, 2014. С. 123–128. (In Russian)

Mordkovich A. G. On some problems of school mathematical education. *Actual problems of teaching mathematics and computer science at school and university: proceedings of the II International Scientific Conference (Moscow, October 2-4, 2014),* pp. 123–128. Moscow: MPSU, 2014. (In Russian)

Плоцки А. *Вероятность в задачах для школьников*. Москва: Просвещение, 1996. 192 с. (In Russian)

Plocki A. *Probability in problems for schoolchildren*. Moscow: Prosveshchenie, 1996. (In Russian)

Самарский А. А., Михайлов А. П. *Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры*. Москва: Физматлит, 2001. 320 с. (In Russian)

Samarsky A. A., Mikhailov A. P. *Mathematical modeling: Ideas. Methods. Examples*. Moscow: Fizmatlit, 2001. (In Russian)

Секей Г. *Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике*. Москва: Мир, 1990. 240 с. (In Russian)

Sekei G. *Paradoxes in probability theory and mathematical statistics*. Moscow: Mir, 1990. (In Russian)

Семенов П. В. Вероятность остроугольности треугольника как задача открытого типа. *Математика и проблемы образования: материалы 41–го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов (Киров, 22–24 сентября 2022 г.*). Киров, 2022. С. 30–31. (In Russian)

Semenov P. V. The probability of the sharpness of a triangle as an open–type problem. In *Mathematics and Problems of Education: proceedings of the 41st International Scientific Seminar of teachers of Mathematics and Computer Science at universities and pedagogical universities (Kirov, September 22-24, 2022)*, pp. 30–31. Kirov, 2022. (In Russian)

Федеральная рабочая программа основного общего образования. Математика (базовый уровень): для 5–9 классов образовательных организаций. Москва: Институт стратегии развития образования, 2023. 106 с. (In Russian)

The Federal work program of basic general education. Mathematics (basic level): for grades 5-9 of educational organizations. Moscow: Institute of Educational Development Strategy, 2023. (In Russian)

Bertrand J. *Calcul des probabilités*. Paris, 1889. https://archive.org/details/calculdesprobabi028601mbp/page/n69/mode/2up

Информация об авторах

Наталия Николаевна Яремко – доктор педагогических наук, доцент, профессор кафедры теории и методики обучения математике и информатике, https://orcid.org/0000-0003-1491-624X, yaremki@yandex.ru, Московский педагогический государственный университет (стр. 1, д. 14, ул. Краснопрудная, 107140 Москва, Россия); **Natalia N. Yaremko** – Doctor of Pedagogical Sciences, Associate Professor of Department of Theory and Methods of Teaching Mathematics and Computer Science, https://orcid.org/0000-0003-1491-624X, yaremki@yandex.ru, Moscow Pedagogical State University (building 1, 14, Krasnoprudnaya str., 107140 Moscow, Russia).

Юлия Андреевна Яковлева – аспирант кафедры теории и методики обучения математике и информатике, https://orcid.org/0009-0008-1020-3449, mayflower2299@gmail.com, Московский педагогический государственный университет (стр. 1, д. 14, ул. Краснопрудная, 107140 Москва, Россия); **Julia A. Yakovleva** – postgraduate student of the department of Theory and Methods of Teaching Mathematics and Computer Science, https://orcid.org/0009-0008-1020-3449, mayflower2299@gmail.com, Moscow Pedagogical State University (building 1, 14, Krasnoprudnaya str., 107140 Moscow, Russia).

Заявленный вклад авторов: Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. **Contribution of the authors:** The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию – 10.10.2024; одобрена после рецензирования – 31.10.2024; принята к публикации – 01.11.2024.

The article was submitted – 10.10.2024; approved after reviewing – 31.10.2024; accepted for publication – 01.11.2024.